UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

TEOREMA DE BANACH-STONE: UN PUENTE ENTRE ANÁLISIS, ÁLGEBRA Y TOPOLOGÍA.

Trabajo de fin de grado presentado por

Óscar Escalante Rodríguez

Tutor: Dr. Fernando Rambla Barreno

Firma del alumno Firma del tutor

Puerto Real, Cádiz, Julio de 2.017

Abstract

In 1932, Banach published the first study on isometries between real-valued function spaces defined over a compact metric space K. He studied the isometries between $\mathcal{C}(K)$ spaces, in relation to the homeomorphisms between the base spaces. Years later, Stone improved his theorem by proving it on spaces that were not necessarily metric, this is what today is known as the classical Banach-Stone theorem. Over the years, many lines of research have developed in relation to this theorem, weakening or changing hypothesis, studying isomorphisms on the ring structure of $\mathcal{C}(K)$ spaces, modifying the norm, considering spaces of vector-valued functions $\mathcal{C}(K, X)$, etc. We will focus our study on Banach and Stone's original theorems as well as on some of the advances made by other authors.

A mis padres.

Resumen

En 1932, Banach publicó el primer estudio sobre las isometrías entre espacios de funciones reales continuas definidas sobre un espacio métrico compacto K; en él se estudiaban las isometrías entre espacios de tipo $\mathcal{C}(K)$ y los homeomorfismos entre los espacios base. Años después, Stone amplió el teorema a espacios K no necesariamente métricos, esto es lo que se conoce como teorema de Banach-Stone clásico. A raíz de este teorema se han desarrollado distintas ramas de investigación relacionadas con este tema debilitando o cambiando hipótesis, estudiando isomorfismos sobre la estructura de anillo de $\mathcal{C}(K)$, modificando la norma, considerando el caso vectorial $\mathcal{C}(K, X)$, etc. En este trabajo realizaremos un estudio del teorema original de ambos y a su vez, veremos algunas ampliaciones realizadas por otros autores.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a toda persona que de una manera u otra me haya ayudado a llegar hasta aquí. Con especial cariño a toda mi familia, incluyendo a los que considero como tal.

A los amigos de verdad que han estado ahí estos años de aprendizaje, sin ellos no hubiera sido fácil superar los malos momentos. También debo agradecer todo aquel que me haya prestado su ayuda cuando lo necesitaba.

Por último, quisiera agradecer a todos los profesores que me hayan enseñado algo de matemáticas o de la vida, puesto que es la mejor experiencia que he podido recibir. Especial mención a F. Rambla por haberme introducido al Análisis Funcional y por haberme enseñado y guiado en el transcurso de este trabajo.

Gracias a vosotros he aprendido mucho más de lo que algún día pude imaginar que existiría en este mundillo de las matemáticas.

Con admiración y respeto.

Óscar Escalante Rodríguez

agosto 2017

Índice general

1 Introducción **1**

2 Preliminares **3**

2.1 Axiomas de separación 3

2.2 Compacidad. Compactificación de Alexandroff 4

2.3 Espacios de funciones continuas 5

2.4 Geometría 6

3 Teorema de Banach-Stone clásico **11**

3.1 Orígenes del problema 11

3.2 Caracterización de Banach para isometrías en espacios $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ 11

3.3 Teorema de Banach-Stone clásico 15

4 Generalización de Banach-Stone para espacios localmente compactos **17**

4.1 Generalización del teorema de Banach-Stone 19

4.2 Propiedad de Banach-Stone 21

5 Consecuencias del Teorema de Banach-Stone **23**

5.1 Sustitución de la norma por una equivalente 24

5.2 Isomorfismos de anillo 25

5.3 ε-isometrías 26

6 Conclusiones **27**

Bibliografía **29**

Los hombres sabios hablan porque tienen algo que decir; los tontos porque tienen que decir algo.

Platón

CAPITULO

1

Introducción

Stefan Banach nació en 1892 en Cracovia. En 1910 decidió estudiar ingeniería y se mudó a Lvov (en aquel entonces pertenecía a Polonia, actualmente forma parte de Ucrania) donde acabó sus estudios 4 años después. Banach volvió a Cracovia, donde conoció a Hugo Steinhaus poco después. A raíz de una publicación conjunta entre ambos, Banach comenzó a publicar una serie de artículos hasta que en 1924, se le permitió presentar su tesis doctoral sin tener estudios matemáticos universitarios. El propio Steinhaus llegaría a decir “Banach fue mi mayor descubrimiento mamtemático”. En 1924 fue aceptado como profesor en Lvov, hasta que en 1939 fue elegido decano de la facultad. En 1941, Lvov fue invadida por la Alemania nazi, y Banach trabajó durante 3 años alimentando piojos para un instituto de investigación alemán. En 1944 retomó su trabajo en la universidad pero menos de un año después falleció debido a un cáncer de pulmón.

Banach sentó las bases del Análisis Funcional moderno. En 1932, en su obra *Teoría de las operaciones lineales* [8] publicó el primer estudio sobre las isometrías entre espacios de funciones reales continuas definidas sobre un espacio métrico compacto K, en él se estudiaban las isometrías entre espacios reales de tipo $\mathcal{C}(K)$ y los homeomorfismos entre los espacios base. Se formulaba así:

Teorema 1.0.1. *(Banach [8]) Si Q y K son dos espacios métricos compactos, entonces $\mathcal{C}(Q)$ y $\mathcal{C}(K)$ son isométricamente isomorfos si y solo si Q y K son homeomorfos. En tal caso, la isometría entre $\mathcal{C}(Q)$ y $\mathcal{C}(K)$ vendrá dada por:*

$$Tf(t) = h(t)f(\phi(t)) \qquad \textit{para} \quad t \in K,$$

siendo ϕ un homeomorfismo de K en Q y h una función real continua de módulo uno.

Años después, Marshall Stone amplió el teorema a espacios K no necesariamente métricos, esto es lo que se conoce como el teorema de Banach-Stone clásico.

Teorema 1.0.2. *(Stone [13]) Sean Q y K espacios compactos Hausdorff y sea T un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{C}(Q)$ y $\mathcal{C}(K)$, entonces existe un homeomorfismo ψ entre K y Q y una funcion h unimodular definida en K, de modo que para cada $f \in \mathcal{C}(Q)$ y $t \in K$,*

$$Tf(t) = h(t)f(\psi(t)).$$

A raíz de este teorema se han desarrollado distintas ramas de investigación relacionadas con este tema debilitando o cambiando hipótesis, estudiando isomorfismos sobre la estructura de anillo de $\mathcal{C}(K)$, modificando la norma, considerando el caso vectorial $\mathcal{C}(K, X)$, etc. Ejemplos de estos estudios pueden encontrarse en [1], [3], [4], [5], [6], [9], [10] y [14]. En el segundo capítulo daremos los conceptos básicos necesarios para probar o mostrar algunos de estos resultados. En el capítulo 3 analizaremos los teoremas de Banach y de Stone. En el capítulo 4 daremos una generalización que trabaja sobre espacios localmente compactos, enunciada así:

Teorema 1.0.3. *(Generalización del Teorema de Banach-Stone [1]) Sean M y N espacios localmente compactos, Hausdorff, no vacíos. Si existe una isometría $T : \mathcal{C}_0(M) \to \mathcal{C}_0(N)$, entonces existe un homeomorfismo $t : N \to M$ y una aplicación continua $u : N \to \{\lambda : \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1\}$, de modo que $Tf = u \cdot (f \circ t)$.*

Por último, en el capítulo 5 se analizarán algunas de las ampliaciones antes mencionadas realizadas por otros autores.

CAPITULO

2

Preliminares

En esta sección intentaremos definir los conceptos y probar o mostrar algunos resultados previos necesarios para abordar los problemas que veremos más adelante.

2.1 Axiomas de separación

Los axiomas de separación son propiedades que satisfacen los espacios topológicos, que según su grado, indican a qué nivel se pueden separar puntos o cerrados del espacio.

Definición 2.1.1. *Diremos que un espacio topológico X es* ***Hausdorff*** *o T_2, si dados dos puntos $x, y \in X$ distintos, existen entornos abiertos U_x, U_y tales que $U_x \cap U_y = \varnothing$.*

Definición 2.1.2. *Diremos que un espacio topológico X es* ***regular****, si dados un punto $x \in X$, y un cerrado $F \subseteq X$ con $x \notin F$, existen entornos abiertos U_x, U_F tales que $U_x \cap U_F = \varnothing$.*

Definición 2.1.3. *Diremos que un espacio topológico X es* ***completamente regular****, si dados un punto $x \in X$, y un cerrado $F \subseteq X$ con $x \notin F$, existe $f : X \to [0,1]$ continua de manera que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$.*

Es claro que completamente regular implica regular al ser f continua.

Definición 2.1.4. *Diremos que un espacio topológico X es* ***normal****, si dados dos cerrados $F_1, F_2 \in X$ disjuntos, existen entornos abiertos U_{F_1}, U_{F_2} tales que $U_{F_1} \cap U_{F_2} = \varnothing$. Si además el espacio es T_1 (los puntos son cerrados), entonces diremos que el espacio es T_4.*

El siguiente lema nos vendrá de ayuda más adelante.

Lema 2.1.5. ***(de Urysohn)*** *Un espacio X es normal si y solo si dados $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos, existe una aplicación continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ de modo que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.*

2.2 Compacidad. Compactificación de Alexandroff

Las definiciones y resultados de esta sección pueden consultarse en [2].

Definición 2.2.1. *Sea X un espacio topológico, diremos que X es* ***compacto*** *si todo recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento finito, es decir, dada una familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$, de manera que $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, existe $J \subseteq I$ finito de modo que $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} U_i$.*

Definición 2.2.2. *Sea X un espacio topológico, diremos que X es* ***localmente compacto*** *si para cada punto $x \in X$ existe una base de entornos compactos que lo contenga.*

Proposición 2.2.3. *Todo espacio topológico compacto y T_2 es normal.*

Proposición 2.2.4. *Dado X un espacio topológico compacto y T_4, y dados $x, y \in X$ distintos, existen entornos disjuntos U_x, U_y tales que $\overline{U}_x \cap \overline{U}_y = \varnothing$.*

Proposición 2.2.5. *Sea (X, T) un espacio topológico localmente compacto y sea $A \subseteq X$, entonces, si A es abierto, A es localmente compacto.*

Demostración. Sea $x \in A$ y sea U entorno de x en (A, T_A), entonces también lo será en (X, T) y por tanto existirá un entorno W de x compacto en (X, T) y tal que $W \subset U$, es claro que W es también compacto en (A, T_A). ■

Proposición 2.2.6. *Sea (X, d) un espacio compacto, todo subconjunto $C \subseteq X$ cerrado es compacto.*

Demostración. Basta considerar que si $\{A_i \ / \ i \in I\}$ es un recubrimiento abierto de C, $\{A_i/i \in I\} \cup \{X \backslash C\}$ es un recubrimiento abierto de X. ■

Proposición 2.2.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff, todo subconjunto $C \subseteq X$ compacto es cerrado.*

En una de las variantes del Teorema de Banach-Stone, trabajaremos sobre un espacio localmente compacto, y para trabajar más fácilmente con él, haremos uso de la compactificación por un punto de tal espacio.

Definición 2.2.8. *Dado un espacio topológico (X, T) no compacto, definiremos su compactificación de Alexandroff como $X^* = X \cup \{\infty\}$ con la topología,*

$$T^* = T \cup \{G^* \subseteq X^* \ / \ X^* \backslash G^* \textit{es cerrado y compacto en } (X, T)\}.$$

Denotaremos a este nuevo espacio por αX.

Nota 2.2.9. *Dado (X, T) un espacio topológico no compacto, (X, T) admite una compactificación por un punto si y solo si (X, T) es localmente compacto y T_2.*

Proposición 2.2.10. *Sea (X, T) un espacio topológico no compacto y (X^*, T^*) su compactificación de Alexandroff, (X^*, T^*) es T_2 si y solo si (X, T) es localmente compacto y T_2.*

Demostración. Supongamos que (X^*, T^*) es T_2. Puesto que la propiedad T_2 es hereditaria, si (X^*, T^*) es T_2, también lo será (X, T). Al ser (X^*, T^*) compacto, es localmente compacto, y puesto que es T_2, $\{\infty\}$ es cerrado, por la proposición 2.2.5, $X = X^* \backslash \{\infty\} \in T^*$ será localmente compacto.

Supongamos ahora que (X, T) es localmente compacto y T_2. Sean $x, y \in \alpha X$, si $x, y \in X$, al ser T_2, existen entornos en X y por lo tanto en αX que los separan. Supongamos que por ejemplo $y = \infty$, por ser X localmente compacto, existe $C \subseteq X$ entorno cerrado y compacto de x, y un entorno abierto $V \subseteq C$ de modo que $X^* \backslash C$ es un entorno abierto de ∞. Es claro que $V \cap (X^* \backslash C) = \varnothing$. ∎

2.3 Espacios de funciones continuas

Los espacios en los que trabajaremos el Teorema de Banach-Stone, y algunas de sus variantes, son los espacios de funciones continuas definidos sobre un espacio compacto L con valores en el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, esto es:

$$\mathcal{C}(L) = \{f : L \longrightarrow \mathbb{K} \ / \ f \text{ es continua}\}.$$

En una de las variantes, en vez de estudiarlo sobre un conjunto compacto, lo haremos sobre uno localmente compacto, lo cual nos lleva a trabajar con este tipo de espacios:

$$\mathcal{C}_0(L) = \{f \in \mathcal{C}(L) \ / \ \text{ para todo } \varepsilon > 0, \{v \in L \ / \ ||f(v)|| \geq \varepsilon\} \text{ es compacto}\}.$$

Otra forma de ver este espacio (que vendrá bien cuando trabajemos con su compactificación), es la siguiente:

$$\mathcal{C}_0(L) = \{f \in \mathcal{C}(\alpha L) \ / \ f(\infty) = 0\}.$$

Nos referiremos a $\mathcal{C}(L, X)$ ó $\mathcal{C}_0(L, X)$ cuando el espacio de llegada no sea necesariamente el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, sino cualquier espacio normado.

Nota 2.3.1. *De ahora en adelante haremos uso de la norma $||\cdot||$ tanto en elementos de X como en elementos de $\mathcal{C}(L)$ ó $\mathcal{C}_0(L)$, bastará con ver sobre qué elementos se aplica para no entrar en confusión. Salvo que se mencione lo contrario, la norma en $\mathcal{C}(L)$ ó $\mathcal{C}_0(L)$ será la del supremo, ésto es, $||f|| = sup\{|f(x)| \ / \ x \in L\}$.*

Veamos ahora un lema que nos servirá de ayuda en el capítulo 4.

Lema 2.3.2. *Sea L un espacio localmente compacto y T_2. Dados $(x_n)_n \subseteq L$ y $x_0 \in L$, si se cumple la siguiente condición:*

$$|f(x_n)| \longrightarrow |f(x_0)| \qquad \textit{para cada } f \in \mathcal{C}_0(L),$$

entonces $x_n \longrightarrow x_0$.

Demostración. Supongamos que $x_n \not\rightarrow x_0$, entonces existen, U entorno de x_0 y $K \subseteq \mathbb{N}$ infinito, tales que para $n \in K$, $x_n \notin U$. Consideremos la compactificación αL y al ser T_2, existen entornos abiertos disjuntos V_1 y V_2 de x_0 y de $\{\infty\}$ respectivamente.

Si consideramos $U \cap V_1$, tenemos un entorno abierto de x_0 tanto en L como en αL y por tanto $L \backslash (U \cap V_1)$ es un cerrado en αL. Puesto que αL es un espacio normal (al ser T_2 y compacto), aplicando el Lema de Urysohn, existe $f : (U \cap V_1) \cup \{x_0\} \longrightarrow [0,1]$ continua y de forma que $f(L \backslash (U \cap V_1)) = \{0\}$ y $f(x_0) = 1$. f es continua y por el Teorema de extensión de Tietze, existe una extensión $F : \alpha L \longrightarrow [0,1]$ continua, con $||F|| = ||f||$. Puesto que $F(\infty) = 0$, si consideramos $g \in \mathcal{C}_0(L)$, definida por $g = F_{|L}$ se cumple que $g(L \backslash (U \cap V_1)) = \{0\}$, $|g(x_0)| = ||g|| = 1$, por tanto, $|g(x_n)| = 0 \not\rightarrow |g(x_0)|$ para $n \in K$. Concluimos finalmente que $x_n \longrightarrow x_0$. ∎

2.4 Geometría

Veamos algunos de los conjuntos con los que trabajaremos más adelante:

Definición 2.4.1. *Sea X espacio de Banach. Dado $C \subset X$, diremos que es un T-conjunto, si la norma es aditiva en C, es decir, dados $x_1, x_2, ..., x_n \in C$, se cumple que*

$$||x_1 + x_2 + ... + x_n|| = ||x_1|| + ||x_2|| + ... + ||x_n||$$

y además, esta propiedad es maximal respecto a la inclusión.

Definición 2.4.2. *Diremos que $E \subset K$ es un* ***conjunto extremal*** *de K, si para cada $x, y \in K$ y cada $\alpha \in (0,1)$, la siguiente implicación es cierta:*

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in E \implies x, y \in E.$$

Si K es un conjunto convexo y E es convexo y extremal en K, diremos que E es una ***cara.*** *Diremos que E es una* ***cara maximal*** *de K si dada cualquier otra cara F de K tal que $E \subset F$, se tiene que $F = E$ ó $F = K$.*

Nota 2.4.3. *Dado un espacio X, cualquier subconjunto que cumpla la propiedad anterior en S_X se le denominará cara, al ser B_X un conjunto convexo.*

Nota 2.4.4. *Los T-conjuntos en un espacio normado X son los conos generados por las caras maximales de B_X. En el caso de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, son los conjuntos de la forma $\alpha\mathbb{R}^+$ con $\alpha \in S_{\mathbb{K}}$.*

La siguiente proposición nos asegura que en $\mathcal{C}_0(L, X)$ una función siempre alcanza la norma en un punto de L.

Proposición 2.4.5. *Sea L un espacio localmente compacto Hausdorff, dada $f \in \mathcal{C}_0(L, X)$, existirá $t \in L$ tal que $||f(t)|| = ||f||$.*

Demostración. Si $f = 0$ es claro. Sea $f \in \mathcal{C}_0(L, X)\backslash\{0\}$, si L es compacto, $f(L)$ es compacto, por tanto se alcanza $||f||$ para algún $t \in L$. En caso contrario, consideramos el conjunto

$$A = \left\{t \in L \;/\; ||f(t)|| \geq \frac{||f||}{2}\right\}$$

Al ser A no vacío y por la definición de $C_0(L, X)$, compacto. Puesto que se verifica la igualdad

$$||f|| = \sup_{t\in L}\{||f(t)||\} = \sup_{t\in A}\{||f(t)||\},$$

podemos asegurar por compacidad que f alcanza su norma para algún valor $t \in A$ y por tanto en L. ∎

A continuación veremos un lema que utilizaremos en el capítulo 4 en el que se describe explícitamente la forma de los T-conjuntos de un espacio de la forma $\mathcal{C}_0(L, X)$, con X cualquier espacio normado.

Lema 2.4.6. *Los T-conjuntos de $\mathcal{C}_0(L, X)$ son del tipo:*

$$C_{v,\Delta} := \{f \in \mathcal{C}_0(L, X) \;/\; ||f(v)|| = ||f||,\; f(v) \in \Delta\}$$

con $v \in L$ y Δ un T-conjunto en X.

Demostración. Veamos primero que $C_{v,\Delta}$ forma un T-conjunto. Sean $f, g \in C_{v,\Delta}$, se tiene que:

$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g|| \overset{(1)}{=} ||f(v)|| + ||g(v)|| \overset{(2)}{=} ||f(v) + g(v)|| \leq ||f + g||$$

Donde (1) es por la definición de $C_{v,\Delta}$ y (2) por ser $f(v), g(v) \in \Delta$. Podemos asegurar por inducción que dadas $f_1, f_2, ..., f_n \in C_{v,\Delta}$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i\right\| = \sum_{i=1}^{n} ||f_i||$$

Veamos que es maximal respecto a esta propiedad. Sea $f \notin C_{v,\Delta}$ tal que $||f + \sum_{i=1}^{n} f_i|| = ||f|| + \sum_{i=1}^{n} ||f_i||$, para cualquier $\{f_1, ..., f_n\} \subseteq C_{v,\Delta}$. Consideremos los dos casos siguientes:

Caso 1: Supongamos que $||f|| \neq ||f(v)||$, entonces, existe $t \in L\backslash\{v\}$ tal que $||f(t)|| = ||f||$. Sea $g_1 \in C_{v,\Delta}$, y definimos $g \in \mathcal{C}_0(L, X)$ por:

$$g(x) = \frac{1}{1 + ||v - x||} g_1(x)$$

Es claro que $g \in C_{v,\Delta}$ y además, si $w \in L\backslash\{v\}$, $||g(w)|| < ||g|| = ||g(v)||$. Sea ahora $n \gg 1$ tal que :

$$||f + \frac{1}{n} \cdot g|| = ||f(\tilde{t}) + \frac{1}{n} \cdot g(\tilde{t})|| = ||f|| + \frac{1}{n}||g|| = ||f(t)|| + \frac{1}{n}||g(v)||$$

para algún $\tilde{t} \neq v$ (alcanzable al ser $||f(t)|| > ||f(v)||$), pero:

$$||f(\tilde{t}) + \frac{1}{n} \cdot g(\tilde{t})|| \leq ||f(\tilde{t})|| + \frac{1}{n} \cdot ||g(\tilde{t})|| < ||f(t)|| + \frac{1}{n} \cdot ||g(v)|| \quad \text{al ser } \tilde{t} \neq v$$

con lo cual llegamos a contradicción.

Caso 2: Debido al caso 1, tenemos que $||f|| = ||f(v)||$, supongamos ahora que $f(v) \notin \Delta$, entonces, existe $a \in \Delta$ tal que $|f(v) + a| \neq |f(v)| + |a|$. Definimos $g \in \mathcal{C}_0(L, X)$ como

$$g(x) = \frac{a}{1 + ||v - x||}.$$

Es claro que $g \in C_{v,\Delta}$. Por la proposición 2.4.5, podemos asegurar que $f + g \in \mathcal{C}_0(L, X)$ alcanza su norma en algún punto, y además, para todo $t \neq v$:

$$||(f + g)(t)|| \leq ||f(t)|| + ||g(t)|| < ||f|| + ||g|| = ||f + g||.$$

Por tanto debe alcanzarse en v, obteniéndose la siguiente contradicción:

$$||f + g|| = ||(f + g)(v)|| = ||f(v) + a|| < ||f(v)|| + ||a|| = ||f|| + ||g|| = ||f + g||.$$

Podemos concluir por tanto que los conjuntos del tipo $C_{v,\Delta}$ forman T-conjuntos en $\mathcal{C}_0(L, X)$.

Sea ahora A un T-conjunto en $\mathcal{C}_0(L, X)$, veamos que está contenido en uno de la forma $C_{v,\Delta}$ para algún $v \in L$, y Δ T-conjunto en X, y por tanto $A = C_{v,\Delta}$ (por maximalidad).

Sean $f, g \in A$ no nulas, se tiene que $||f+g|| = ||f|| + ||g||$ y consideremos

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{||f||} \qquad \text{y} \qquad g_1(x) = \frac{g(x)}{||g||}.$$

se cumple que $f_1, g_1 \in A$, por tanto

$$||f_1 + g_1|| = ||f_1(t) + g_1(t)|| = ||f_1|| + ||g_1|| = 1 + 1 = 2,$$

pero al ser $||f_1(t)|| \leq 1$ y $||g_1(t)|| \leq 1$, y al ser $||f_1(t)|| + ||g_1(t)|| = 2$, se tiene que

$$||f_1|| = ||f_1(t)||, \qquad ||g_1|| = ||g_1(t)||$$

por tanto concluimos que $f, g \in C_{t,\Delta}$, siendo Δ un T-conjunto de X tal que $f(t), g(t) \in \Delta$. Concluimos que A debe estar contenido en algún conjunto de la forma $C_{v,\Delta}$ por maximalidad, y por ello mismo, $A = C_{v,\Delta}$.

■

En el siguiente lema podemos ver como tanto en X como en $\mathcal{C}_0(L, X)$, los T-conjuntos están generados por caras de la esfera.

Lema 2.4.7. *Dado $Y = \mathcal{C}_0(L, X)$, y dados $v \in L$ y Δ un T-conjunto en X, se tiene que $C_{v,\Delta} \cap S_Y$ forma una cara en B_Y.*

Demostración. Sean $f, g \in S_Y$ y sea $\alpha \in (0,1)$ tales que:

$$\alpha f + (1-\alpha) g \in C_{v,\Delta} \cap S_Y$$

entonces,

$$1 = ||\alpha f + (1-\alpha) g|| = ||\alpha f(v) + (1-\alpha) g(v)|| \leq$$

$$\leq \alpha ||f(v)|| + (1-\alpha) ||g(v)|| \leq \alpha ||f|| + (1-\alpha) ||g|| = \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

Por tanto podemos concluir que $||f|| = ||f(v)||$ (al igual con g). Además, al cumplirse que $\alpha f(v) + (1-\alpha) g(v) \in \Delta$ (en concreto a $\Delta \cap S_X$), se tiene que $f(v), g(v) \in \Delta$, al ser $\Delta \cap S_X$ una cara de S_X. Concluimos que $f, g \in C_{v,\Delta} \cap S_Y$.

■

Como es natural, las isometrías lineales sobreyectivas preservan el ser cara y el ser cara maximal.

Proposición 2.4.8. *Sea $T : X \to Y$ con X, Y espacios normados, una isometría lineal sobreyectiva, entonces para cada cara C en B_X, $T(C)$ es una cara en B_Y. Si C es maximal, también lo es $T(C)$.*

Demostración. Sean $x, y \in Y$, $\alpha \in (0,1)$ tal que $\alpha x + (1-\alpha)y \in T(C)$, existe $c \in C$ tal que $T(c) = \alpha x + (1-\alpha)y$. Aplicamos T^{-1} y obtenemos:

$$c = \alpha T^{-1}(x) + (1-\alpha)T^{-1}(y) \in C$$

y por ser C una cara, $T^{-1}(x), T^{-1}(y) \in C$, por tanto concluimos que $x, y \in T(C)$.

Sea C una cara maximal en B_X, y supongamos que existe F una cara en B_Y tal que $T(C) \subsetneq F \subsetneq B_Y$, consideramos T^{-1} y obtenemos que $T^{-1}(F)$ es una cara que verifica $C \subsetneq T^{-1}(F) \subsetneq B_X$ lo cual contradice que C sea maximal, por tanto $T(C)$ debe ser una cara maximal en B_Y. ■

Posteriormente en el capítulo 4 veremos que efectivamente, una isometría lineal sobreyectiva envía T-conjuntos en T-conjuntos.

CAPITULO

3

Teorema de Banach-Stone clásico

3.1 Orígenes del problema

El primer estudio sobre las isometrías en espacios de funciones continuas, lo publicó Banach en 1932. Banach estudió las isometrías en espacios de funciones reales definidas sobre un espacio métrico compacto. En los años siguientes, Stone amplió su estudio a espacios que no eran necesariamente espacios métricos, dando así lugar a lo que conocemos como Teorema de Banach-Stone clásico.

A continuación daremos la demostración de la caracterización de Banach sobre las isometrías en $\mathcal{C}(K)$ sobre el cuerpo de los reales, haciendo uso de las derivadas direccionales de la norma en f, también llamada derivada de Gâteaux de la norma.

3.2 Caracterización de Banach para isometrías en espacios $\mathcal{C}(\mathrm{K})$

Para empezar, veremos una caracterización de los "picos" de una función en relación a la existencia de las derivadas direccionales de la norma en f.

Lema 3.2.1. *Sea $f \in \mathcal{C}(K)$. Existe $s_0 \in K$, de manera que*

$$|f(s_0)| > |f(s)| \qquad \textit{para todo } s \in K \backslash \{s_0\} \tag{1}$$

si y solo si existe

$$\lim_{t\to 0} \frac{||f+tg||-||f||}{t} \qquad \textit{para toda } g \in \mathcal{C}(K). \tag{2}$$

Además, se tiene que

$$\lim_{t\to 0} \frac{||f+tg||-||f||}{t} = g(s_0)sgn(f(s_0)). \tag{3}$$

Demostración. Supongamos que se cumple (1), entonces $||f|| = |f(s_0)|$. Dada $g \in \mathcal{C}(K)$ y $t \in \mathbb{R}$, $f + tg \in \mathcal{C}(K)$, luego su norma se alcanza en algún punto $s_t \in K$, por tanto:

$$|f(s_0)+tg(s_0)| - |f(s_0)| \leq ||f+tg|| - ||f|| \leq |f(s_t)+tg(s_t)| - |f(s_t)|, \tag{$*$}$$

y puesto que

$$|f(s_0)| \leq |f(s_0)+tg(s_0)| + |-tg(s_0)| \leq |f(s_t)+tg(s_t)| + |tg(s_0)|,$$

obtenemos que:

$$0 \leq |f(s_0)| - |f(s_t)| \leq |t||g(s_0)| + |t||g(s_t)| \leq 2|t|||g||,$$

por tanto nos asegura que $\lim_{t\to 0} |f(s_t)| = |f(s_0)|$ y por la compacidad de K, concluimos que $\lim_{t\to 0} s_t = s_0$.

Supongamos ahora que $f(s_0) < 0$, el otro caso se haría de forma análoga, entonces dado t lo suficientemente pequeño, se cumple que

$$|f(s_0)+tg(s_0)| - |f(s_0)| = -f(s_0) - tg(s_0) + f(s_0) = -tg(s_0)$$

y también,

$$|f(s_t)+tg(s_t)| - |f(s_t)| = -f(s_t) - tg(s_t) + f(s_t) = -tg(s_t).$$

Partiendo de estas igualdades y de $(*)$, obtenemos que

$$-tg(s_0) \leq ||f+tg|| - |f|| \leq -tg(s_t)$$

por tanto,

$$\lim_{t\to 0} \frac{||f+tg||-||f||}{t} = -g(s_0) = g(s_0)sgn(f(s_0)).$$

El caso de $f(s_0) > 0$ se puede realizar de forma análoga y obtendríamos

$$\lim_{t\to 0} \frac{||f+tg||-||f||}{t} = g(s_0) = g(s_0)sgn(f(s_0)),$$

completando así la primera implicación.

Supongamos que se cumplen (2) y (3), y supongamos que existen $s_1, s_2 \in K$ tales que $||f|| = |f(s_1)| = |f(s_2)| \geq |f(s)|$, para todo $s \in K$. Definimos $g(s) = -d(s, s_2)$, siendo d la métrica en K. Supongamos que $f(s_1) < 0$, entonces, dado t suficientemente pequeño, se cumple que

$$||f + tg|| - ||f|| \geq |f(s_1) + tg(s_1)| - |f(s_1)| = -f(s_1) - tg(s_1) + f(s_1) = td(s_1, s_2),$$

por lo tanto,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{||f + tg|| - |f||}{t} \geq d(s_1, s_2) \geq 0,$$

además, se tiene que

$$||f + tg|| - ||f|| \geq |f(s_2) + tg(s_2)| - |f(s_2)| = 0,$$

por tanto

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{||f + tg|| - |f||}{t} \leq 0,$$

de donde concluimos que $s_1 = s_2$, para que $d(s_1, s_2) = 0$. Si $f(s_1) > 0$, hacemos un argumento análogo con $h(s) = d(s, s_2)$, quedando probada esta implicación.

■

A continuación veremos una proposición antes de probar el teorema que nos acortará la demostración del mismo. Para ello haremos uso de las proposiciones 2.2.6 y 2.2.7.

Proposición 3.2.2. *Sea $f : K \to Q$ una aplicacion biyecctiva y continua, entre K y Q espacios métricos compactos, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Para probarlo, veamos que f es una aplicación cerrada, y por tanto que f^{-1} es continua. Sea $C \subseteq K$ un conjunto cerrado, por ser K compacto se tiene que C es compacto, y al ser f continua, $f(C)$ es compacto, pero a su vez es cerrado por ser Q un espacio métrico.

Dada $f^{-1} : Q \to K$ y un cerrado $C \subseteq K$, por ser f biyectiva, se tiene que $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$ que hemos visto que es cerrado, concluyendo así que f es un homeomorfismo. ■

Con esto estamos en disposición de probar el Teorema de Banach para las isometrías en espacios $\mathcal{C}(K)$.

Teorema 3.2.3. *(Banach) Si Q y K son dos espacios métricos compactos, entonces $\mathcal{C}(Q)$ y $\mathcal{C}(K)$ son isométricamente isomorfos si y sólo si Q y K son homeomorfos. En tal caso, la isometría entre $\mathcal{C}(Q)$ y $\mathcal{C}(K)$ vendrá dada por:*

$$Tf(t) = h(t)f(\phi(t)) \qquad \textit{para} \quad t \in K. \tag{1}$$

Siendo ϕ un homeomorfismo de K en Q y h una función real de módulo uno sobre K.

Demostración. Es facil ver que si existe un homeomorfismo ϕ de K en Q, entonces T es una isometría de $\mathcal{C}(Q)$ en $\mathcal{C}(K)$.

Sea ahora T una isometría de $\mathcal{C}(Q)$ en $\mathcal{C}(K)$, sea $s_0 \in Q$ y sea $f \in \mathcal{C}(Q)$ de modo que $|f(s_0)| > |f(s)|$, para todo $s \in Q\backslash\{s_0\}$. Por el lema 3.2.1,

$$\lim_{r\to 0} \frac{||f + rg|| - ||f||}{r} = g(s_0)sgn(f(s_0))$$

debe existir para toda $g \in \mathcal{C}(Q)$. Puesto que T es una isometría,

$$g(s_0)sgn(f(s_0)) = \lim_{r\to 0} \frac{||f + rg|| - ||f||}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{||Tf + rTg|| - ||Tf||}{r},$$

y haciendo de nuevo uso del lema, sabemos que existe $t_0 \in K$ de modo que $|Tf(t_0)| > |Tf(t)|$, para todo $t \in K\backslash\{t_0\}$, y además,

$$g(s_0)sgn(f(s_0)) = Tg(t_0)sgn(Tf(t_0)),$$

por tanto, si definimos h como, $h(s_0) = sgn(f(s_0))sgn(Tf(t_0))$, se tiene que $|h| = 1$, y

$$Tg(s_0) = h(t_0)g(s_0).$$

Definimos $\psi : Q \to K$ de modo que $\psi(s_0) = t_0$. Veamos que es inyectiva. Si $\psi(s_1) = \psi(s_2)$, entonces $|g(s_1)| = |g(s_2)|$ para toda $g \in \mathcal{C}(Q)$, por tanto $s_1 = s_2$. Veamos ahora que es sobreyectiva, sea $t_0 \in K$ y definimos q sobre K como

$$q(t) = \frac{1}{1 + d(t, t_0)},$$

siendo d la métrica en K. Sea $f = T^{-1}g$, entonces

$$|f(s)| = \frac{1}{1 + d(\psi(s), t_0)}$$

y puesto que $||f|| = ||q|| = 1$, existe $s_0 \in Q$ de modo que $\psi(s_0) = t_0$.

Finalmente, veamos que es continua. Sea $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Q$, $g \in \mathcal{C}(K)$ y $Tf = g$. Si $s_n \to s_0$, puesto que f es continua, $|g(\phi(s_n))| = |f(s_n)| \to |f(s_0)| = |g(\phi(s_0))|$. Si definimos $g(t) = d(t, \phi(s_0))$, obtenemos que

$$d(\phi(s_n), \phi(s_0)) = |g(s_n)| \to |g(s_0)| = 0$$

por tanto $\phi(s_n) \to \phi(s_0)$, luego ϕ es continua. Utilizando la proposición anterior (3.2.2), concluimos que ψ forma un homeomorfismo entre K y Q. ■

3.3 Teorema de Banach-Stone clásico

Banach publicó su resultado en 1932, y en 1937 Stone amplió este resultado para espacios compactos Hausdorff. Este teorema es el que se conoce como Teorema de Banach-Stone clásico. En este caso no daremos una demostración completa del resultado, pero si una guía de como Stone consiguió la ψ y h que propone.

Teorema 3.3.1. *(Stone) Sean Q y K espacios compactos Hausdorff y sea T un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{C}(Q)$ y $\mathcal{C}(K)$, entonces existe un homeomorfismo ψ entre K y Q y una funcion h unimodular definida en K, de modo que para cada $f \in \mathcal{C}(Q)$ y $t \in K$,*

$$Tf(t) = h(t)f(\psi(t)).$$

Demostración. En primer lugar, vamos a buscar una correspondencia entre los elementos de K y los de Q. Para cada $s \in Q$, sea $Q(s) = \{f \in C(Q) \ / \ |f(s)| = ||f||\}$. Se tiene que $Q(s)$ contiene a todas las aplicaciones constantes y, dadas $f_1, ..., f_n \in Q(s)$,

$$g = \sum_{j=1}^{n} f_j sgn(f_j) \in Q(S),$$

además $||g|| = \sum_{j=1}^{n} ||f_j||$. Fijando $s \in Q$, definimos,

$$F(f) = \{t \in K \ / \ |Tf(t)| = ||Tf|| \text{ para } f \in Q(s)\}.$$

Dadas $f_1, ..., f_n \in Q(s)$, debe existir un $t \in K$ de modo que $|Tg(t)| = ||Tg||$, sin embargo

$$||Tg|| = |Tg(t)| \leq \sum_{j=1}^{n} |Tf_j(t)| \leq \sum_{j=1}^{n} ||Tf_j|| = \sum_{j=1}^{n} ||f_j|| = ||g|| = ||Tg||$$

por tanto $|Tf_j(t)| = ||Tf_j||$ para $j = 1, ..., n$. El conjunto $F(f)$ es cerrado, para f continua, y dado que cada intersección finita de conjuntos de este tipo es no vacía, al ser K compacto existe al menos un $t \in K$ común a todos. Se tiene que $Tf \in K(t)$ para toda $f \in Q(s)$, además, T envia $Q(s)$ en $K(t)$ de igual manera que T^{-1} envia $K(t)$ en $Q(s)$. Se puede probar que esto nos da una correspondencia uno a uno donde $s \longmapsto t = \phi(s)$.

Las aplicaciones que utiliza Stone en su prueba son $\psi = \phi^{-1}$ y $h = T1$.

■

CAPITULO

4

Generalización de Banach-Stone para espacios localmente compactos

A continuación, daremos una generalización del Teorema de Banach-Stone clásico, en la que se trabajará sobre espacios localmente compactos. Para ello estudiaremos los espacios de funciones continuas $\mathcal{C}_0(L)$ definidos por:

$$\mathcal{C}_0(L) = \{f \in \mathcal{C}(L) \; / \; \text{ para cada } \varepsilon > 0, \{v \in L \; / \; ||f(v)|| \geq \varepsilon\} \text{ es compacto}\}.$$

Anteriormente, vimos que los T-conjuntos de un espacio $\mathcal{C}(L, X)$, son de la forma $C_{v,\Delta}$. En el siguiente lema veremos que dada una isometría lineal sobreyectiva, ésta envía T-conjuntos en T-conjuntos.

Lema 4.0.1. *Sea $T : X \to Y$ una isometría lineal sobreyectiva, T manda T-conjuntos en T-conjuntos.*

Demostración. Sea A un T-conjunto en X, veamos que $B = T(A)$ forma un T-conjunto en Y. Sean $x, y \in B$, existen $a, b \in A$ tales que

$$||x+y|| = ||T(a)+T(b)|| = ||T(a+b)|| = ||a+b|| = ||a||+||b|| = ||T(a)||+||T(b)|| = ||x||+||y||.$$

Veamos que esta propiedad es maximal respecto a la inclusión, sea $v \in Y \backslash B$ y sea $w \in X \backslash A$ tal que $T(w) = v$. Al ser A un T-conjunto, la aditividad de la norma es una propiedad maximal respecto a la inclusión, luego dado w, existe $a \in A$ tal que $||a+w|| <$ $< ||a|| + ||w||$, por tanto

$$||T(a)+v|| = ||T(a)+T(w)|| = ||T(a+w)|| = ||a+w|| < ||a||+||w|| = ||T(a)||+||v||.$$

■

El siguiente lema nos ayudará a definir la isometría del teorema 4.1.1.

Lema 4.0.2. *Si $T : \mathcal{C}_0(M) \to \mathcal{C}_0(N)$ es lineal y existe $t : N \to M$ tal que para cada $w \in N$ y cada $f \in \mathcal{C}_0(M)$ se cumple*

$$|T(f(w))| = |f(t(w))|$$

entonces existe $u : N \to S_{\mathbb{K}}$ tal que

$$Tf(w) = u(w)f(t(w))$$

para cada $w \in N$ y cada $f \in \mathcal{C}_0(M)$.

Demostración. Fijemos $w \in N$ y tomemos cualquier $g \in \mathcal{C}_0(M)$ tal que $g(t(w)) \neq 0$ (tenemos garantizada su existencia mediante el teorema de Tietze). Definimos u en el punto w como

$$u(w) = \frac{Tg(w)}{g(t(w))} \in S_{\mathbb{K}}.$$

Sea ahora $f \in \mathcal{C}_0(M)$ arbitraria y veamos que se cumple la igualdad requerida. En efecto, si tomamos $\beta = \frac{f(t(w))}{g(t(w))}$ entonces tenemos que

$$|T(f - \beta g)(w)| = |(f - \beta g)(t(w))| = 0$$

por lo tanto concluimos que

$$Tf(w) = \beta Tg(w) = \frac{f(t(w))}{g(t(w))}u(w)g(t(w)) = u(w)f(t(w)).$$

■

<u>Nota:</u> Puesto que en el siguiente teorema trabajaremos sobre los cuerpos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y en estos cuerpos los T-conjuntos son de la forma $\alpha\mathbb{R}^+$ con $\alpha \in S_{\mathbb{K}}$, dado L un espacio localmente compacto y Hausdorff y dados $t \in L$, $\mu \in S_{\mathbb{K}}$, definimos el siguiente conjunto

$$C_{t,\mu} := \{f \in \mathcal{C}_0(L) \;/\; \mu^{-1}f(t) = ||f||\}.$$

Éstos serán los T-conjuntos en $\mathcal{C}_0(L)$ con los que trabajaremos en el teorema siguiente.

4.1 Generalización del teorema de Banach-Stone

Haciendo uso de las proposiciones anteriores, estamos en condiciones de probar el siguiente teorema. Un esquema de esta prueba puede seguirse en [1] (págs. 138-140).

Teorema 4.1.1. *(Generalización del Teorema de Banach-Stone) Sean M y N espacios localmente compactos, Hausdorff, no vacíos. Si existe una isometría* $T : \mathcal{C}_0(M) \to \mathcal{C}_0(N)$*, entonces existe un homeomorfismo* $t : N \to M$ *y una aplicación continua* $u : N \to \{\lambda : \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1\}$*, de tal manera que* $Tf = u \cdot (f \circ t)$.

En particular, la existencia de una isometría entre $\mathcal{C}_0(M)$ *y* $\mathcal{C}_0(N)$ *implica que M y N son homeomorfos.*

<u>Nota:</u> Para todo $x \neq 0$ en el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se puede escribir de forma única como $\lambda\,|x|$ con $|\lambda| = 1$. En la demostración haremos referencia a λ de tal manera que $\lambda^{-1}x = |x| \in \mathbb{R}^+$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}_0(M)\backslash\{0\}$ y consideremos $Tf \in \mathcal{C}_0(N)$ ($Tf \neq 0$). Por la proposición 2.4.5, existe $w \in N$ tal que $|Tf(w)| = ||Tf|| = ||f||$. Buscaremos las aplicaciones t y u de la siguiente manera.

Sea $\alpha \in S_{\mathbb{K}}$ tal que $\alpha^{-1}Tf(w) > 0$, luego $T\alpha^{-1}f \in C_{w,+1}$. Por el lema 4.0.1, debe existir un T-conjunto en $\mathcal{C}_0(M)$ de modo que $T(C_{v,\lambda}) = C_{w,+1}$, por tanto, $\alpha^{-1}f \in C_{v,\lambda}$, cumpliéndose que $\lambda^{-1}\alpha^{-1}f(v) = ||f|| = ||Tf|| = \alpha^{-1}Tf(w)$. Si definimos ahora t y u por $t(w) = v$ y $u(w) = \lambda^{-1}$, se tiene que

$$Tf(w) = u(w)f(t(w)).$$

Pero, ¿se cumple para todo $w \in N$? Sea $w' \neq w$, veamos primero que $|Tf(w')| = |f(t(w'))|$. Supongamos que $\alpha = |Tf(w')| < |f(t(w'))| = \beta$, entonces existe U entorno de w' tal que $|Tf(v)| < \frac{\alpha+\beta}{2}$ y $\frac{\alpha+\beta}{2} < |f(t(v))|$ para $v \in U$. Sea $h \in \mathcal{C}_0(N)$ tal que $h(L\backslash U) = \{0\}$ y $||h|| = n \gg 1$. Se tiene que $h = Tg$ para cierto $g \in \mathcal{C}_0(M)$. Existe $\alpha \in S_{\mathbb{K}}$ tal que $\alpha \cdot g(t(w'))$ y $f(t(w'))$ están en el mismo T-conjunto, consideremos entonces $\alpha \cdot h$. Se cumple lo siguiente

$$||Tf+T\alpha g|| = \sup_{t\in N}|Tf(t)+\alpha h(t)| = \sup_{t\in U}|Tf(t)+\alpha h(t)| \leq \sup_{t\in U}|Tf(t)|+\sup_{t\in U}|\alpha h(t)| <$$

$$< \frac{\alpha+\beta}{2} + n < |f(t(w'))| + |\alpha g(t(w'))| = |f(t(w')) + \alpha g(t(w'))|\,,$$

Lo cual contradice que T sea una isometría. Aplicando el lema 4.0.2, obtenemos que $Tf(w) = u(w)f(t(w))$ para todo $w \in N$.

Concluimos entonces que

$$Tf = u \cdot (f \circ t).$$

Veamos primero que t es una biyección. Es sobreyectiva por la definición de T, para estudiar la inyectividad, supongamos lo contrario. Sean $w_1, w_2 \in N$ con $w_1 \neq w_2$ tales que $t(w_1) = t(w_2) = v$, sean U_1, U_2 entornos respectivos disjuntos. Consideramos $g_1 \in C_{w_1,1} \backslash \{0\}$ y $g_2 \in C_{w_2,1} \backslash \{0\}$ tales que $g_i(N \backslash u_i) = \{0\}$ y $||g_1|| = ||g_2||$.

Tenemos que $T^{-1}g_1 \in C_{v,\lambda_1}$ y $T^{-1}g_2 \in C_{v,\lambda_2}$. Se cumple que $g = g_1 + g_2 \neq 0$, en concreto, $g \in C_{w_1,1} \cap C_{w_2,1}$ al alcanzar su norma en w_1 y en w_2, por tanto, $Tg \neq 0$. Ahora

$$||g_1 + g_2|| = ||g_1|| = ||g_2|| = ||T^{-1}g_1|| = ||T^{-1}g_2||.$$

Pero, $Tg \in C_{v,\lambda_1} \cap C_{v,\lambda_2}$ y por definición de los conjuntos, $\lambda_1 = \lambda_2$, por tanto,

$$||T^{-1}g|| = ||T^{-1}g_1 + T^{-1}g_2|| = ||T^{-1}g_1|| + ||T^{-1}g_2||$$

lo cual no es posible puesto que $||T^{-1}g|| = ||T^{-1}g_i||$ y son no nulos.

Veamos ahora que t, t^{-1} y u son continuas. En primer lugar, puesto que por medio de T, dadas $f \in \mathcal{C}_0(M)$ y $g \in \mathcal{C}_0(N)$, se obtienen las siguientes expresiones $Tf(w) = u(w)f(t(w))$ y $T^{-1}g(v) = j(v) \cdot g(t^{-1}(v))$ con $||u|| = ||j|| = 1$, sólo será necesario probar la continuidad de t y u.

Sea $(w_n)_n \subseteq N$ tal que $w_n \longrightarrow w_0$, entonces, $Tf(w_n) \longrightarrow Tf(w_0)$, por tanto $u(w_n)f(t(w_n)) \longrightarrow u(w_0)f(t(w_0))$, en concreto $|f(t(w_n))| \longrightarrow |f(t(w_0))|$. Puesto que esto se verifica para toda $f \in \mathcal{C}_0(L)$, haciendo uso del lema 2.3.2, podemos asegurar que $t(w_n) \longrightarrow t(w_0)$, por tanto t es continua.

Veamos que u es continua. Supongamos M no compacto, consideramos αM, conjunto compacto y T_4. Al ser T_4, existen entornos abiertos U y V de $t(w_0)$ y de $\{\infty\}$ respectivamente, tales que sus clausuras son disjuntas. Por el Lema de Urysohn, existe una función continua $g : \overline{U} \cup \overline{V} \longrightarrow [0,1]$ de modo que $g(\overline{U}) = \{0\}$ y $g(\overline{V}) = \{1\}$. Por el Teorema de extensión de Tietze existe una extensión continua $G : \alpha L \longrightarrow [0,1]$ con $||G|| = ||g||$ y puesto que $G(\infty) = 0$, $f = G_{|M} \in \mathcal{C}_0(M)$. Dado $U \subseteq M$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $t(w_n) \in U$, por tanto, $u(w_n)f(t(w_n)) = u(w_n) \longrightarrow u(w_0)f(t(w_0)) = u(w_0)$ concluyendo así que u es continua.

Supongamos ahora que M fuera compacto, bastaría con tomar un entorno abierto U de $t(w_0)$, considerar U^c y un entorno compacto C de $t(w_0)$ de modo que $C \subseteq U$ y construir la g anterior de forma análoga, quedando así probado para espacios compactos. ■

Puesto que todo espacio compacto es localmente compacto, este teorema implica el teorema 3.3.1 (Banach-Stone clásico), y también la versión del mismo sobre el cuerpo de los complejos.

4.2 Propiedad de Banach-Stone

A continuación definiremos la propiedad de Banach-Stone y de Banach-Stone fuerte, para ello haremos uso de $[X, X]_{ISO}$, que denota el conjunto de los isomorfismos de X en X.

Definición 4.2.1. *Sea X un espacio de Banach:*

(i) *Diremos que X cumple la* ***propiedad de Banach-Stone****, si dados dos espacios localmente compactos T_2, se tiene que un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{C}_0(M, X)$ y $\mathcal{C}_0(N, X)$ implica que M y N son homeomorfos.*

(ii) *Diremos que X cumple la* ***propiedad de Banach-Stone fuerte****, si dados dos espacios localmente compactos T_2, se tiene que un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{C}_0(M, X)$ y $\mathcal{C}_0(N, X)$ implica que existe un homeomorfismo $t : N \to M$ y una aplicación continua $u : N \to [X, X]_{ISO}$ de modo que $Tf(w) = [u(w)][f(t(w))]$ para $f \in \mathcal{C}_0(M, X)$ y $w \in N$.*

Tal y como acabamos de ver en el teorema 4.1.1, los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ satisfacen la propiedad de Banach-Stone normal y fuerte. A continuación daremos algunos resultados de Jerison en cuanto a espacios que cumplen esta propiedad.

Definición 4.2.2. *Diremos que dos T-conjuntos C_1 y C_2 en un espacio de Banach son discrepantes, si $C_1 \cap C_2 = \{0\}$ ó si existe un T-conjunto C_3 de modo que $C_1 \cap C_3 = C_2 \cap C_3 = \{0\}$.*

Definición 4.2.3. *Diremos que un espacio es estrictamente convexo, si tomando dos elementos de S_X, la recta afín que los une solo corta a S_X en esos puntos.*

Veamos ahora los resultados de Jerison, éstos pueden consultarse en [4]:

Teorema 4.2.4. *Sea X un espacio de Banach de modo que cualesquiera dos T-conjuntos son discrepantes. Entonces X cumple la propiedad de Banach-Stone fuerte.*

Corolario 4.2.5. *Sea X un espacio de Banach estrictamente convexo. Entonces X cumple la propiedad de Banach-Stone fuerte.*

CAPITULO

5

Consecuencias del Teorema de Banach-Stone

En este capítulo mostraremos algunos de los avances que se han desarrollado a raíz del Teorema de Banach-Stone, por medio de diversos autores. En primer lugar, veamos una variación del teorema 4.1.1 que acabamos de ver en el capítulo anterior. En ésta se estudia cómo ciertas isometrías entre subespacios, dan lugar a relaciones entre los espacios base, pero antes veamos la siguiente definición.

Definición 5.0.1. *Sea L un espacio localmente compacto, diremos que un subespacio cerrado $E \subset \mathcal{C}_0(L)$ es completamente regular, si para cada $x_0 \in L$ y cada entorno U de x_0 en L, existe $f \in E$ de manera que $|f(x_0)| = ||f||$ y $|f(x)| < ||f||$ para $x \in L \backslash U$.*

Teorema 5.0.2. *(Myers, Araujo y Font) Sean Q y K espacios localmente compactos y sean $E \subset \mathcal{C}_0(Q)$, $F \subset \mathcal{C}_0(K)$ subespacios completamente regulares. Si E y F son isométricos, entonces K y Q son homeomorfos.*

En concreto toda isometría $T : F \longrightarrow E$ es de la forma

$$Tf(x) = a(x)(f \circ h)(x)$$

con $h : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo y $a : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $|a(x)| = 1$ para todo $x \in X$.

5.1 Sustitución de la norma por una equivalente

Hasta ahora, dada $f \in \mathcal{C}(L)$ ó en $\mathcal{C}_0(L)$, hemos utilizado como norma la norma del supremo, esto es $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in L\}$, pero es posible sustituir ésta por la siguiente:

$$\rho(f) = \sup\{||f(x) - f(y)|| : x, y \in L\} = diam(f(L)).$$

En el caso de $\mathcal{C}(L)$, ρ es una seminorma por la existencia de aplicaciones constantes no nulas, en tal caso, se considera $\mathcal{C}_\rho(L) = {}^{\mathcal{C}(L)}\!/_{\ker(\rho)}$ siendo $\ker(\rho) = \{f \in \mathcal{C}(L) : f = cte\}$, de tal manera, conseguimos un espacio donde ρ sea una norma. Sea $\pi : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}_\rho(L)$ la aplicación cociente usual, los siguientes resultados se deben a F. Cabello [10]:

Teorema 5.1.1. *Sea L un espacio compacto T_2, se tiene que $T_\rho : \mathcal{C}_\rho(L) \to \mathcal{C}_\rho(L)$ es una isometría lineal sobreyectiva si y solo si existen un homeomorfismo φ en L y $\tau \in S_{\mathbb{K}}$ de manera que $T_\rho(\pi(f)) = \pi(\tau f \circ \varphi)$.*

Teorema 5.1.2. *Sean X e Y espacios compactos T_2, equivalen:*

(a) X e Y son homeomorfos

(b) $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$ son isométricos

(c) $\mathcal{C}_\rho(X)$ y $\mathcal{C}_\rho(Y)$ son isométricos.

En el caso de espacios $\mathcal{C}_0(L)$, ρ es una norma al no existir aplicaciones constantes (excepto la nula), en concreto, para cada $f \in \mathcal{C}_0(L)$, sea $\overline{x} \in \mathbb{K}$ de modo que $||f|| = |f(\overline{x})|$, entonces

$$\rho(f) = sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in L\} = \text{máx}\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \alpha L\} \geq |f(\overline{x}) - f(\infty)| = ||f||$$

y además,

$$\begin{aligned}\rho(f) =& sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in L\} \leq sup\{|f(x)| + |f(y)| : x, y \in L\} \leq \\ &\leq sup\{|f(x)| : x \in L\} + sup\{|f(y)| : y \in L\} = 2||f||.\end{aligned}$$

Por lo cual $||f|| \leq \rho(f) \leq 2||f||$, y por tanto $||\cdot||$ y ρ son normas equivalentes sobre $\mathcal{C}_0(L)$. Esto nos lleva al siguiente teorema del mismo autor:

Teorema 5.1.3. *Sea X un espacio localmente compacto, no compacto. Una biyección lineal T en $\mathcal{C}_0(X)$ preserva diámetros si y sólo si existe un homeomorfismo φ en αX y un valor $\tau \in S_{\mathbb{K}}$ de manera que $Tf = \tau(f \circ \varphi - f(\varphi(\infty))1_{\alpha X})$.*

5.2 Isomorfismos de anillo

A continuación veremos otra vía de investigación posterior al teorema de Banach-Stone, en ella se estudian las propiedades algebraicas de los espacios $\mathcal{C}(K)$ y las topológicas de K. En este caso, trabajaremos sobre espacios T_2 completamente regulares. Este resultado se lo debemos a Gelfand y Kolmogoroff (teorema 5.2.3), pero antes, debemos conocer unos resultados y definiciones previas.

Teorema 5.2.1. *Sea X un espacio compacto T_2. Se tiene que $I \subseteq \mathcal{C}(X)$ es un ideal maximal si y sólo si es de la forma $I(t) := \{f \in \mathcal{C}(X) \ / \ f(t) = 0\}$ para algún $t \in X$.*

La demostración puede consultarse en [2]. A continuación intentaremos definir la topología de Stone, necesaria para el Teorema que vamos a mostrar. Sea L un espacio topológico compacto, completamente regular y T_2. Si $f \in \mathcal{C}(L)$, definimos los siguientes conjuntos:

$$M = \{I \subseteq \mathcal{C}(L) \ / \ I \text{ es ideal maximal en } \mathcal{C}(L)\}$$

$$zf = \{t \in L \ / \ f(t) = 0\} \qquad czf = \{t \in L \ / \ f(t) \neq 0\},$$

dicho esto, consideramos:

$$d(f) = \{I \in M \ / \ f \in I\} \qquad h(f) = \{I \in M \ / \ f \notin I\} = M \backslash d(f).$$

Gracias al teorema 5.2.1, podemos asegurar que existe una biyección entre L y el conjunto de los ideales maximales de $\mathcal{C}(L)$. Al ser L completamente regular, $\{czf\}$ forma una base de abiertos. Construimos el homeomorfismo de manera que $\{\varphi(czf)\}$ sea una base de abiertos de $\varphi(S)$,

$$\varphi(czf) = \{I(t) \ / \ f(t) \neq 0\} = \{I(t) \ / \ f(t) \notin I(t)\} = h(t) \cap \varphi(S),$$

definimos entonces la topología de Stone, T_s por medio de $\beta = \{h(f) \ / \ f \in \mathcal{C}(L)\}$ que define una base de abiertos. Lo cual nos lleva al siguiente teorema.

Teorema 5.2.2. *La aplicación $\Psi : K \to \{I(t) \subseteq \mathcal{C}(K) \ / \ t \in K\}$ es un homeomorfismo si se dota a $\{I \subseteq \mathcal{C}(K) \ / \ I$ es ideal maximal $\}$ de la topología de Stone.*

Teorema 5.2.3. *(Gelfand y Kolmogoroff, 1939) Sean K_1 y K_2 espacios compactos, entonces, $\mathcal{C}(K_1)$ y $\mathcal{C}(K_2)$ son álgebras isomorfas bajo la topología de Stone si y solo si K_1 y K_2 son homeomorfos.*

En concreto toda isometría $T : \mathcal{C}(K_1) \longrightarrow \mathcal{C}(K_2)$ *es de la forma*

$$Tf = f \circ \phi$$

con $\phi : K_2 \longrightarrow K_1$ *homeomorfismo.*

Demostración. Si tenemos un homeomorfismo $\phi : K_2 \to K_1$, definiendo T por medio de $Tf = f \circ \phi$ tendríamos el isomorfismo. Supongamos que tenemos un isomorfismo de anillos, T es una biyección entre M_1 y M_2, además es continua por como está definida la topología, entonces tenemos $\Psi_2^{-1} \circ T \circ \Psi_1 : K_2 \to K_1$ biyectiva y continua y por tanto homeomorfismo.

■

5.3 ε-isometrías

En 1966 Milutin [14] probó que dados dos espacios métricos compactos no numerables X e Y, se cumplía que $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$ eran isomorfos. En esta sección vamos a mostrar un resultado en el que dados dos espacios localmente compactos X e Y, debilitaremos la conexión entre $\mathcal{C}_0(X)$ y $\mathcal{C}_0(Y)$, pidiendoles que sean "ε-isomorfos".

Teorema 5.3.1. *(Amir y Cambern, 1966) Sean* X *e* Y *espacios localmente compactos, y supongamos que existe un isomorfismo lineal* $T : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$*. Si se cumple que* $||T||||T^{-1}|| < 1 + \varepsilon$*, con* $0 < \varepsilon < 1$*, entonces* X *e* Y *son homeomorfos.*

Amir también mostró que para $\varepsilon \geq 1$ no se verificaba el teorema, dando un caso en el que $||T||||T^{-1}|| = 2$ y X e Y no son homeomorfos. Cengiz amplió el resultado anterior utilizando subespacios cerrados extremadamente regulares. Se dice que $E \subseteq \mathcal{C}_0(X)$ es un subespacio extremadamente regular, si para cada $x_0 \in X$, cada entorno U de x_0 y cada $0 < \varepsilon < 1$, existe $f \in E$ de modo que $||f|| = |f(x_0)| = 1$ y $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X \backslash U$.

Teorema 5.3.2. *(Cengiz, 1973) Sean* X *e* Y *espacios localmente compactos, y sean* $E \subseteq \mathcal{C}_0(X)$ *y* $F \subseteq \mathcal{C}_0(Y)$ *subespacios extremadamente regulares. Si existe un isomorfismo lineal* $T : E \to F$ *con* $||T||||T^{-1}|| < 1 + \varepsilon$ *para algún* $0 < \varepsilon < 1$*, entonces* X *e* Y *son homeomorfos.*

CAPITULO

6

Conclusiones

Comenzamos esta memoria probando los teoremas de Banach y Stone, y posteriormente, dimos una generalización del mismo para espacios localmente compactos. Por otra parte tenemos los resultados de Jerison (ver [4]), en los que se indican algunos espacios que cumplen la propiedad de Banach-Stone, y al estar $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ entre ellos, también se amplía el teorema original. Finalmente mencionamos un resultado de F. Cabello [10], que nos decía que dados dos espacios X e Y compactos y T_2, equivalen:

(a) X e Y son homeomorfos

(b) $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$ son isométricos

(c) $\mathcal{C}_\rho(X)$ y $\mathcal{C}_\rho(Y)$ son isométricos

Ampliando así los resultados de Banach y Stone aun más. Como vimos, también se han estudiado los isomorfismos de anillos en lugar de las isometrías, un estudio más profundo de la estructura de anillo de los espacios $\mathcal{C}(K)$ y sus propiedades, puede hallarse en [6]. En la bibliografía se pueden encontrar una serie de problemas abiertos relacionados con este tema. Por ejemplo, no se conoce una caracterización intrínseca de los espacios de Banach con la propiedad de Banach-Stone o la de Banach-Stone fuerte.

Bibliografía

[1] Ehrhard Behrends. *M-Structure and the Banach-Stone Theorem, Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979.

[2] A. Aizpuru. *Apuntes Incompletos de análisis funcional*. Universidad de Cádiz, 2000.

[3] Richard J. Fleming, James E. Jamison. *Isometries on Banach Spaces: Function spaces*, volume 1. Chapman and Hall/CRC, 2003.

[4] Richard J. Fleming, James E. Jamison. *Isometries on Banach Spaces: Function spaces*, volume 2. Chapman and Hall/CRC, 2008.

[5] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo. Variations on the banach-stone theorem. Extracta Mathematicae, 17 (2002), no. 3, 351–383.

[6] L. Gillman, M. Jerison. *Rings of Continuous Functions*. D. Van Nostrand Company, INC, 1960.

[7] Albrecht Pietsch. *History of Banach Spaces and Linear Operators*. Birkhauser Boston, 2007.

[8] S. Banach. *Théorie des Opérations Lineaires. Monografie Matematiyczne Tom. 1.* Z Subwencji Funduszu Kultury Narodowej. Varsovia, 1932.

[9] Z. Semadeni. *Banach Spaces of Continuous Functions*, volume 1. PWN-Varsovia, 1971.

[10] F. Cabello. Diameter Preserving Linear Maps and Isometries Arch. Math. 73 (1999), no. 5, 373–379.

[11] J. Margalef Roig, E. Outerelo Dominguez y J. L. Pinilla. Topología, volumen 2. Alhambra, 1979.

[12] J. Margalef Roig, E. Outerelo Dominguez y J. L. Pinilla. Topología, volumen 3. Alhambra, 1979.

[13] M. Stone. Applications to the theory of boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), no. 3, 375–481.

[14] A. Miljutin. Isomorphisms of the spaces of continuous functions over compact sets of the cardinality of the continuum. Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1966), 150–156.